Methodus Cl. Græffi æquationes numericas altioris gradus solvendi,

quam

Consentiente Ampl. Facult. Philos. Lund.

et

Præside

CAROLO JOH. D:S HILL,
Philos. Doct., Math. Prof. Reg. et Ord.

Pro Laurea

proponit auctor

JOHANNES CHRISTOPHORUS TOLL,
Philos. Cand., V. D. M., Verml.,

in Academia Carolina die XXI Junii MDCCCXLVII,
h. a. m. s.

I.

Lundæ,
typis Berlingianis,
MDCCCXLVII.

Methodus Cel. Græffii æquationes numericas altioris gradus solvendi.

Postquam multi excellentissimorum Analystarum temporibus præterlapsis et presentibus haud completo successu in gravissimo illo problemate persolvendo elaborarunt: *ut invenirentur omnes radices datæ Æquationis Numericæ altioris gradus*, contigit demum Cl. Græffio, qui Turici scholas Mathematicas habet, ut viam inveniret, qua omnes tum rationales et irrationales, tum imaginariæ radices facile et certo elici possint. In libro, qui inscribitur: "Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, als Beantwortung einer von der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aufgestellten Preisfrage," Zürich 1837, Græffius ipse methodi suæ rationem reddidit et in Astronomisches Jahrbuch für 1841 cel. Prof. Enckius maxime generaliter eam exposuit additis quibusdam emendationibus, quæ ad ipsum modum operandi pertinent, quibus in iis, quæ posthac tractabuntur, uti nobis liceat. Methodum Græffianam his verbis commendat Enckius: "Die so auf H:rn Prof. Gräffe's neuem Wege sich ergebene Auflösung empfichlt sich in sehr hohem Grade durch ihre Allgemeinheit, Strenge und Kiirze. Sie ist in so fern direct, als sie keine Versuche irgend welcher Art nöthig macht. Die ist auf alle noch so hohen Grade der Gleichungen anwendbar, führt nie auf Gleichungen höheren Grades als die gegebene ist, und verlangt bei ihrem stets unverändert bleibenden

Verfahren nie unausführbare Rechnungen. Die Natur der Wurzeln, die Anzahl der imaginairen, legt ihr durchaus kein Hinderniss in den Weg, sie giebt immer bestimmte Resultate, über deren Richtigkeit die einfachste Substitution entscheiden lässt. Sie setzt durchaus gar keine Kentniss von der Natur der Wurzeln voraus, so wie sie überhaupt aus den einfachsten Eigenschaften der Gleichungen sich herleiten lässt. Für die Kürze derselben spricht endlich der Umstand, dass die Bestimmung der sämmtlichen Wurzeln einer Gleichung vom 7:ten Grade bei sechs imaginairen Wurzeln so weit der Wahrheit genähret als Logarithmen von 7 Decimalen es erlauben, in etwa 2 bis 3 Stunden gänzlich vollendet sein wird."

Quamvis igitur methodus illa antiquioribus solvendi methodis multo præstat, tamen non ut par erat, cognita fuit et accepta. Quo circa non alienum existimavimus ad eam vulgandam aliquantulum conferre et speramus fore, ut nihil, quod ad ipsam rei vim atque naturam pertineat, nostra opera pereat, si rem ita exposuerimus, ut omnibus pateat. Quæ in fine opusculi de approximatione dicentur, ea jam hic commemorantur eam solam ab causam, ut uno loco aditus sit ad omnia quæ ad quæstionem plane dissolvendam pertinent, et quæ a nobis ad calculum radicum imaginariarum faciliorem reddendum hic facta sunt, in eo ceteris methodis fortasse præstent, quod non ex tabulis Sinuum pendeat, quam accurate calculum ponere velimus.

Æquatio quædam altioris gradus
$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots\ldots\ldots \pm N = 0$, cujus radices a, b, c, d .... omnes sunt reales et positivæ, est, ut constat, tale productum ex factoribus $x-a$, $x-b$, $x-c$ .. ut evanescat o si $x=a$, $x=b$ etc.; quod si radices a, b, c, d .... omnes sunt negativæ, Æquatio, necesse est, hæc sit:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + N = 0.$$

In utraque causa fit $A = a+b+c+d+ \ldots$, $B = ab+ac+ad+$

. . . . ., $C = abc + abd +$ etc., aut Coefficientes A, B, C . . . . sunt (I:ma, II, III etc.) Classes Combinationis sine repetitione elementorum a, b, c, d . . . . et N ex omnibus est productum. Si Summæ harum combinationum secundum gradus earum $(a), (ab), (abc)$, ... signantur, Æquationes, quas supra exposuimus, hac exprimuntur:

$$x^n \pm (a)\, x^{n-1} + (ab)\, x^{n-2} \pm (abc)\, x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Ex Coefficientibus talis Æquationis omnes radicum ejus functiones symmetricæ computari possunt, nondum cognitis radicibus ipsis, atque etiam omnes Coefficientes Æquationis cujusdam exponi, cujus radices sunt m:tæ potentiæ radicum datæ æquationis, sic:

$$x^n \pm (a^m)\, x^{n-1} + (a^m b^m)\, x^{n-2} \pm (a^m b^m c^m)\, x^{n-3} + \ldots\ldots = 0.$$

Radices ponuntur ordinatæ ad magnitudinem, ut a sit maxima, b secunda, c tertia etc., nulla ratione habita, utrum positivæ sint an negativæ; omnis enim hac in re dissimilitudo evanescit, quum m, ut in sequentibus, par est numerus. Ulterius m potest tam magnum sumi, ut, ratione habita certi approximationis gradus, et b^m et multo magis c^m . . . etc. in Coefficiente $(a^m) = a^m + b^m + c^m + \ldots$ occultantur ab a^m et pro (a^m) poni possit a^m *). Eodem modo $a^m b^m$ in Coefficienti $(a^m b^m)$ tantum superare potest ceteras $a^m c^m + a^m d^m + \ldots$ ut etiam hic Coefficiens poni possit $= a^m b^m$, et sic in omnibus ceteris Coefficientibus omnes termini a primo et maximo destrui possunt, ut æquatio denique hæc fiat:

$$x^m \pm a^m x^{n-1} + a^m b^m x^{m-2} \pm a^m b^m c^m x^{n-3} + \ldots\ldots\ldots = 0.$$

---

*) Si, ut Enckio placet, computatio fit Logarithmis V decimalium, in Coeff. (a^m) omnes minores termini evanescunt comparati cum a^m, quum hic factus est $> 100000\ b^m$, et eodem modo in ceteris Coefficientibus. Sed ex ratione $a : b$ pendet quando hoc fiat. Si ex. gr. $a : b = 2 : 1$ b^m tollitur quoties $m = 17$, sin $a : b = 16 : 15$, b^m non prius quam m circa $= 180$ evanescit.

Si Coefficientes hujus æquationis numeri sunt, statim exstat a^m; secundo Coefficiente per primum diviso exsistit b^m; si tertius Coeff. per secundum dividitur c^m etc., quo facto radices obtinentur radice m ex quotis pro quoque loco extrahenda.

Methodus Græffii æquationem satis altis potestatibus ex radicibus datæ æquationis effingendi hæc est: quæritur primum æquatio, cujus radices sunt quadrata datæ; ita accepta æquatione eodem modo tractanda efficitur æquatio, cujus radices sunt quartæ potestates datæ, iterataque ejusdem operationis repetitione exsistunt æquationes quarum radices sunt 8:væ, 16:mæ, 32:mæ potentiæ æquationis propositæ. Quum omnes Coefficientes facta elevatione reperiuntur esse quadrata jam inventorum, effectum est id, quod sequebamur, ut accurata esset computatio nec opus est ulteriore elevatione.

Methodus ex æquatione quadam æquationem, cujus radices quadrata datæ æquent, formandi saltem inde ab Euleri temporibus cognita fuit, qui formulam edidit, qua computatio esset facienda, neque tamen rei rationem reddidit. Quæ nova æquatio multis quidem modis potest deduci, ita tamen poterit facillime percipi.

Primum animadvertendum est, etiamsi radices reales datæ cujusdam æquationis a, b, c, d . . . omnes sint positivæ aut negativæ aut aliæ positivæ, aliæ negativæ, tamen quadrata radicum semper fieri positiva, itaque æquatio, quæ quæritur, semper necesse est producta sit ex factoribus $x-a^2, x-b^2, x-c^2$ etc. ideoque hanc formam accipiat:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots\ldots\ldots = 0,$$ in qua

$$A = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots\ldots, \quad B = a^2b^2 + a^2c^2 + \ldots\ldots b^2c^2 + \ldots\ldots,$$

$$C = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + \ldots\ldots$$

Quodsi in datam æquationem substituitur $x^{\frac{1}{2}}$ pro x, efficitur:

$$x^{\frac{n}{2}} - Ax^{\frac{n-1}{2}} + Bx^{\frac{n-2}{2}} - Cx^{\frac{n-3}{2}} + \ldots\ldots = 0,$$

Jamsi hæc æquatio ita ordinatur:

$$x^{\frac{n}{2}}+Bx^{\frac{n-2}{2}}+Dx^{\frac{n-4}{2}}+\ldots\ldots=Ax^{\frac{n-1}{2}}+Cx^{\frac{n-3}{2}}+Ex^{\frac{n-5}{2}}+\ldots\ldots$$

et quadratur, ut amoveatur quod inest irrationale omnesque termini in primum membrum transferentur, æquatio illa exsistit:

$$x^n-(A^2-2B)x^{n-1}+(B^2-2AC+2D)x^{n-2}-(C^2-2BD+2AE-2F)$$

$x^{n-3}+\ldots\ldots=0$, quæ habet radices $a^2, b^2, c^2 \ldots$ secundum quam Græffius exempla sua computat.

Si æquatio $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots\ldots=0$ eidem rationi et præcepto tractatur, facile patebit unum atque idem exinde sequi. Quoniam omnis differentia radicum positivarum et negativarum tollitur prima qvadratione, Enckius suadet, ut omnibus æquationibus deductis detur forma illa, quam supra posuimus, id quod fit mutandis signis 1:mæ, 3:æ etc. Coefficientium. Inde hoc primum nascitur commodum, ut omnes novi Coefficientes uno eodemque modo ex priori æquatione formentur. Nam si Coefficientes datæ æquationis eo ordine positi sunt, quo sibi invicem succedunt, nulla signorum habita ratione, sunt $A, B, C, D, E, F, G, H \ldots\ldots$ derivata æquatio hæc fit:

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
x^n+A^2 & x^{n-1}+B^2 & x^{n-2}+C^2 & x^{n-3}+D^2 & x^{n-4}+\ldots\ldots=0. \\
-2B & -2AC & -2BD & -2CE & \\
 & +2D & +2AE & +2BF & \\
 & & -2F & -2AG & \\
 & & & +2H &
\end{array}$$

Lex, qua hi novi Coefficientes ex datis formantur, tam est in promptu, ut verbis exprimi non opus sit. Placet igitur omissa tali explicatione plenas exponere formulas maxime vulgarium Casuum, quibus in iis, quæ sequuntur utemur:

Si $n=3$, itaque data æquatio:

$x^3+Ax^2+Bx+C=0$, nova æquatio hæc fit

$$\begin{array}{r|r|l}
x^3+A^2 & x^2+B^2 & x+C^2=0. \\
-2B & -2AC &
\end{array}$$

Si $n=4$, itaque æquatio proposita:

$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$, derivata hæc fit:

$$x^4+\left.\begin{array}{r}A^2\\-2B\end{array}\right| x^3+\left.\begin{array}{r}B^2\\-2AC\\+2D\end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r}C^2\\-2BD\end{array}\right| x+D^2=0.$$

Si $n=5$, id est $x^5+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$, nova æquatio hæc fit:

$$x^5+\left.\begin{array}{r}A^2\\-2B\end{array}\right| x^4+\left.\begin{array}{r}B^2\\-2AC\\+2D\end{array}\right| x^3+\left.\begin{array}{r}C^2\\-2BD\\+2AE\end{array}\right| x^2+\left.\begin{array}{r}D^2\\-2CE\end{array}\right| x+E^2=0.$$

Sive igitur radices a, b, c . . . . datæ æquationis sunt positivæ, sive negativæ, semper prima æquatio, quæ secundum has formulas derivatur, effecta sit necesse est ex factoribus $x+a^2$, $x+b^2$, $x+c^2$ . . altera æquatio ex factoribus $x+a^4$, $x+b^4$, $x+c^4$ . . . . ., unde sequitur, omnes Coefficientes in derivatis æquationibus positivæ sint necesse esse, quod alterum est commodum illius signorum mutationis. Si vero unus tantum Coefficiens negativus in derivatis æquationibus invenitur, hoc certum est indicium, æquationem primitivam radices habere imaginarias.

Computatio potest pluribus modis fieri. Dum Coefficientes sunt parvi numeri, optimum factu est ope eorum computare, quo fit, ut novi Coefficientes exsistant plane exacti. Post aliquot elevationes tamen crescunt Coefficntes, ut prope fieri non possit, ut Computatio hoc modo porro peragatur. Ad quod incommodum tollendum Græffius duas methodos adhibuit. In uno exemplorum, quæ habet, certam multitudinem primarum notarum in quoque Coefficiente exponit et solum indicavit, quot sint neglectæ. In ceteris exemplis utitur Logarithmis cum VII decimalibus pro Coefficientibus, nec vero significat, quo modo eos computaverit. Si unumquemque terminum ope logarithmorum computavit et ipsis numeris Additioni et Subtractioni subjecit, etiam hoc modo computatio valde prolixa sit necesse est —.

Contra ea perfacilis erit, si, ut præcepit Enckius, usi erimus logarithmis V decimalium et additiones subtractionesque, quæ obveniunt, fecerimus ope Tabulæ Gaussianæ, quæ dicitur, qua duce ex logarithmis duorum numerorum logarithmi Summæ et differentiæ duorum numerorum inveniri possunt *). Dum fit tota computatio, nullo opus est alio subsidio, nisi hac tabula, et computatio confecta est quum omnia Coefficientium quadrata aliud in alium vim habere desinunt, aut quum unusquisque logarithmus duplicatus est cum 5, 3 major quam summa duorum proximorum. Radices satis accurate inveniuntur, ut semper 5 notæ decimales sint exactæ, sæpe etiam 6:ta, cujus rei causa hæc esse jure judicari potest quod in ultimis decimalibus quod inest incertum, sæpe iterata additione et subtractione tollitur et divisio denique conficitur per magnum numerum.

Inventis radicibus tamen restat, ut signa earum definiantur. Ad quod efficiendum simplex substitutio in datam æquationem sufficit, quæ insuper necessaria est ad veritatem calculi probandam.

Si ad radiccs irrationales inveniendas majori opus est subtilitate, quam illa, necesse est iterum adhibeatur methodus approximandi Newtoniana, qua fit computus quam accuratissime. Sæpe evenit, ut unus pluresve Coefficientium Logarithmicorum lente tantum duplicari possint, id quod indicat similes radices inveniri. Æquatio quarti gradus, ex factoribus $x+a$, $x+a$, $x+b$, $x+c$ composita, fit:

$$
\begin{array}{rl|l|l|l}
x^4 & +2a & x^3 + a^2 & x^2 + a^2b & x + a^2bc = 0 \\
 & +b & \quad +2ab & \quad +a^2c & \\
 & +c & \quad +2ac & +2abc & \\
 & & \quad +bc & &
\end{array}
$$

Si igitur radices ad tantam potentiam m elevatæ sunt, ut in

*) Editionem Logarithmorum et tabulæ Gaussianæ quinque instructam decimalibus interpolationi aptissimam edidit Westphal, Regiomonte 1821.

unoquoque Coefficiente omnes termini comparati cum primo evanescant, tamen Factor 2 in primo termino primi Coefficientis efficit, ut hic Coefficiens non possit fieri potentia m του a, quum contra Coefficiens του x^2 aperte fiat a^{2m}, et si La^{2m} per m dividitur, exsistit La^2. Idem fit, si æquatio duas habet radices æquales cum b aut c, hoc solum discrimine, ut hoc casu secundus aut tertius Coefficiens non fiat quadratum, quod idem fere fit, quum duæ radices eadem prope sunt magnitudine *). In una æquatione etiam obvenire possunt plura paria radicum æqualium, et tunc, non opus est continuare elevationem donec omnes radices segregatæ sint, sed tantummodo donec productum earum secerni possit a producto ceterarum, quo facto se præbent factores trinomicos vel æquationes secundi gradus, qui solutione facta, singulas radices reddunt (vide Exemplum secundum.)

Eadem ratione res tractatur, si æquatio imaginarias habet radices. In æquationem cum realibus Coefficientibus radices imaginariæ binæ tantummodo occurrere possunt et hanc formam babent: $p+qi$ **) et $p-qi$, ubi p aut positiuvs aut negativus esse potest.

Ut facilius cognoscatur, quales sint altiores harum radicum potentiæ, poni potest

$$p=g\,C.\varphi \text{ et } q=g\,S\varphi \text{ unde}$$

$$T\varphi=\tfrac{p}{q},\ g=\sqrt{p^2+q^2},\ p+qi=g\,(C\varphi+S\varphi i) \text{ et}$$

$p-qi=g\,(C\varphi-S\varphi i$, in quibus expressionibus g dicitur modulus.

---

*) Radices eadem magnitudine eas esse intelligimus, quæ eadem sunt dignitate numerali nulla habita ratione signorum, quia hæc dissimilitudo tollitur prima quadratione.

**) Ut $\sqrt{1}$ ponatur $=i$ præcipit Cl. Præses.